Vollständige Diskussion einer ganzrationalen Funktion am Beispiel $f(x) = x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$

Definitionsbereich

$D_f = \Re$ (Funktion ist für alle x definiert)

Symmetrieeigenschaften

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = (-1)^4 x^4 - 2(-1)^2 x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1$

Die Funktion ist eine gerade Funktion. Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y-Achse.

Verhalten im Unendlichen

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^4 - 2x^2 + 1) = +\infty$ Nach oben geöffnete Parabel.

Stetigkeit/ Unstetigkeit

Ganzrationale Funktionen sind in $D_f = \Re$ stetig.

Nullstellen

$f(x) = x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$ mit u = x^2 folgt $f(u) = u^2 - 2 \cdot u + 1$. (Substitution)

$0 = u^2 - 2u + 1$ hat die Lösung $u_{1/2} = 1$ – nur eine Nullstelle

Damit ist $x^2 = 1$ und $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Die Funktion hat die Nullstellen bei x = 1 und x = -1.
Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $P_1(-1|0)$ und $P_2(1|0)$.

Schnittpunkte mit der y-Achse

x wird 0 gesetzt. Damit ist $f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$ und somit der Schnittpunkt mit der y-Achse bei $P_3(0|1)$.

Lokale Extremstellen

Finden der ersten Ableitung: $f'(x) = 4x^3 - 4x = x(4x^2 - 4)$

Ableitung „0“ setzen: $f'(x) = 0 = x(4x^2 - 4)$

Erste Lösung: $x_1 = 0$, $0 = 4x^2 - 4$; $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$; weitere Lösungen

Finden der zweiten Ableitung: $f''(x) = 12x^2 - 4$

Einsetzen der Lösungen: $f''(0) = 0 - 4 < 0;$ *lokales Maximum*

$f''(1) = 12 - 4 > 0;$ *lokales Minimum*

$f''(-1) = 12 - 4 > 0;$ *lokales Minimum*

Maximumpunkt bei $P_4(0|1)$, Minimumpunkt bei $P_5(1|0)$ und $P_6(-1|0)$.

Wendepunkt

Zweite Ableitung „0“ setzen. $f''(x) = 12x^2 - 4 = 0$

Lösung: $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$; Finden der dritten Ableitung und einsetzen: $f'''(x) = 24x \neq 0$;

Damit ist Lösung gleich Wendestelle: $P_7\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{4}{9}\right)$ und $P_8\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{4}{9}\right)$.

Anstieg an der Stelle ist erste Ableitung: $f'\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - 4\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

$$f'\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + 4\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Einsetzen Wendepunkt in y = mx + n: $\frac{4}{9} = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}} + n = -\frac{8}{9} + n$; $n = \frac{4}{3}$

Aufgrund der Symmetrie sind die Wendetangenten: $y = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}x + \frac{4}{3}$ und $y = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}x + \frac{4}{3}$.

Graph